



2014年 理学部・工学部 第4問

4  $a, b$  は、 $0 < b < a$  を満たす実数とする。曲線  $y = e^x$  上の点  $(0, 1)$  における接線  $l_1$  の方程式を  $y = f(x)$ 、点  $(a, e^a)$  における接線  $l_2$  の方程式を  $y = g(x)$  とおく。また、 $l_1$  と  $l_2$  の交点の  $x$  座標を  $p(a)$  とする。連立不等式

$$0 \leq x \leq b, \quad f(x) \leq y \leq e^x$$

の表す領域の面積を  $S_1$ 、連立不等式

$$b \leq x \leq a, \quad g(x) \leq y \leq e^x$$

の表す領域の面積を  $S_2$  とし、 $R = e^{-b}S_2$  とおく。このとき、次の問いに答えよ。必要ならば、すべての自然数  $k$  に対して  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^k e^{-x} = 0$  が成り立つことを用いてよい。

- (1)  $p(a)$  を求めよ。
- (2)  $S_1$  と  $S_2$  を求めよ。
- (3)  $t = a - b$  とする。  $R$  を  $t$  のみの関数として表せ。
- (4) 極限值  $\lim_{a \rightarrow \infty} (a - p(a))$  を求めよ。
- (5)  $b = p(a)$  とする。このとき、極限值  $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{S_2}{S_1}$  を求めよ。