



2016年 理学部・工学部 第4問

4  $z_0$  を虚数単位  $i$  と異なる複素数とする. 複素数  $z_n$  を

$$z_n = i + \frac{\sqrt{2}(z_{n-1} - i)(1 + i)}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める.

- (1) すべての自然数  $n$  に対し  $z_n \neq i$  であることを示せ.
- (2)  $\frac{z_n - i}{z_{n-1} - i}$  の絶対値  $r$  と偏角  $\theta$  を求めよ. ただし,  $\theta$  の範囲は  $0 \leq \theta < 2\pi$  とする.
- (3)  $z_m = z_0$  となる最小の自然数  $m$  を求めよ.
- (4) 複素数平面上において  $z_n$  の表す点を  $P_n$  とする. (3) で求めた  $m$  に対し  $m$  本の線分  $P_0P_1, P_1P_2, \dots, P_{m-1}P_m$  で囲まれる図形の面積を  $S$  とする.  $z_0 = 1 - i$  のとき  $S$  の値を求めよ.