愛媛大学

2016年 農・工（環境建設）・教育 第3問

$\boxed{3}$ 2つの数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が $a_1=0$, $b_1=1$ および

$$\begin{cases} a_{n+1}=a_n-b_n \\ b_{n+1}=a_n+3b_n+1 \end{cases} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定められている．

(1) $c_n=a_n+b_n+1$ によって定められる数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) a_{n+1} を a_n と n を用いて表せ．

(3) $d_n=\dfrac{a_n+1}{2^n}$ によって定められる数列 $\{d_n\}$ の一般項を求めよ．

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{2^k}$ を求めよ．

(1) 2式を加えて，$a_{n+1}+b_{n+1}=2a_n+2b_n+1$

∴両辺に1を加えて，$a_{n+1}+b_{n+1}+1=2(a_n+b_n+1)$

∴ $c_{n+1}=2c_n$

∴ $\{c_n\}$ は初項 $a_1+b_1+1=2$，公比2の等比数列より，$\underline{c_n=2^n}$ //

(2) (1)より，$a_n+b_n+1=2^n$ ∴ $b_n=2^n-a_n-1$

これを $a_{n+1}=a_n-b_n$ に代入して，$\underline{a_{n+1}=2a_n-2^n+1}$ //

(3) $d_n=\dfrac{a_n+1}{2^n} \iff a_n=2^n\cdot d_n-1$

これを(2)で求めた式に代入して，$2^{n+1}\cdot d_{n+1}-1=2\cdot(2^n\cdot d_n-1)-2^n+1$

∴ $2^{n+1}\cdot d_{n+1}=2^{n+1}\cdot d_n-2^n$

両辺を 2^{n+1} で割って，$d_{n+1}=d_n-\dfrac{1}{2}$

∴ $\{d_n\}$ は初項 $\dfrac{a_1+1}{2}=\dfrac{1}{2}$，公差 $-\dfrac{1}{2}$ の等差数列 ∴ $d_n=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cdot(n-1)$ ∴ $\underline{d_n=-\dfrac{1}{2}n+1}$ //

(4) (3)より，$\dfrac{a_n+1}{2^n}=-\dfrac{1}{2}n+1$ ∴ $a_n=-n\cdot 2^{n-1}+2^n-1$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{2^k}=\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{k}{2}+1-\frac{1}{2^k}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n-\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=\underline{\frac{1}{2^n}-\frac{1}{4}n^2+\frac{3}{4}n-1}$$ //