



2014年医学部第5問

5 n は自然数, p_0, p_1, \dots, p_n は $p_0 > 0, \dots, p_n > 0$ かつ $p_0 + p_1 + \dots + p_n = 1$ を満たす定数とする. ポイント $0, 1, 2, \dots, n-1, n$ が, それぞれ $p_0, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n$ の確率で得られる試行 T を考える. 試行 T を 1 回行って得られるポイントの期待値を a とし, $A = [a] + 1$ とする. ただし, 実数 x に対して $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す. 競技者は, 試行 T を下記の各設問のルールに従って何回か行う.

(1) k を $1 \leq k \leq n$ を満たす整数とする. 競技者は, 試行 T を以下のルールに従って最大 2 回まで行う.

- ① 試行 T を 1 回行い, もしポイントが k 以上であれば 2 回目の試行を行わず, このポイントを賞金とする.
- ② 1 回目のポイントが k 未満であれば 2 回目の試行 T を行う. このとき, 1 回目のポイントは無効とし, 2 回目のポイントを賞金とする.

このとき賞金の期待値を b_k とする. b_k を求めよ.

(2) (1) の期待値 b_k は k が A のとき最大となることを示せ.

(3) m を $1 \leq m \leq n$ を満たす整数とする. 競技者は, 試行 T を以下のルールに従って最大 3 回まで行う.

- ① 試行 T を 1 回行い, もしポイントが m 以上であれば 2 回目以降の試行を行わず, このポイントを賞金とする.
- ② 1 回目のポイントが m 未満であれば 2 回目の試行 T を行う. 2 回目のポイントが A 以上であれば 3 回目の試行を行わない. このとき, 1 回目のポイントは無効とし, 2 回目のポイントを賞金とする.
- ③ 2 回目のポイントが A 未満であれば 3 回目の試行 T を行う. このとき, 1 回目, 2 回目のポイントは無効とし, 3 回目のポイントを賞金とする.

このとき賞金の期待値を c_m とする. c_m を求めよ.

(4) (3) の期待値 c_m は m が $B = [b_A] + 1$ のとき最大となり, $c_B \geq b_A$ であることを示せ. ただし, b_A は (1) で求めた期待値 b_k の $k = A$ のときの値である.

(5) $n = 5$ とし, 試行 T として, 5 枚の硬貨を同時に投げ, 表の出た枚数をポイントとする試行を考える. また, b_k, c_m は上記で定義したものとする.

(i) $p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, a$ を求めよ.

(ii) (1) のように最大 2 回試行を行う場合, b_k の最大値を求めよ.

(iii) (3) のように最大 3 回試行を行う場合, c_m の最大値を求めよ.