

2015年工学部第3問

3  $a$  を定数とし,  $0 < a < \frac{\pi}{2}$  とする. 媒介変数  $t$  を用いて

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

と表される曲線を  $C$  とする. また,  $C$  の  $0 \leq t \leq a$  の部分の長さを  $L$  とする.

(1)  $L$  を  $a$  を用いて表せ. ただし,  $L$  は  $L = \int_0^a \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$  と表される.

(2) 曲線  $C$  上の点  $P(\cos^3 a, \sin^3 a)$  における接線  $l$  の方程式を求めよ. また,  $l$  と  $x$  軸の交点  $Q$  の座標を求めよ.

(3) (2) の 2 点  $P, Q$  間の距離を  $M$  とするとき,  $L = \frac{3}{2}M$  が成り立つことを示せ.