

2016年文化情報・生命医科・スポーツ第4問

4 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 5, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{6}{\sqrt{a_n}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める. $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{6}{\sqrt{x}}$ ($x > 0$) として, 次の問いに答えよ.

- (1) 閉区間 $4 \leq x \leq 9$ において, $f(x)$ の最大値と最小値, 導関数 $f'(x)$ の最大値と最小値をそれぞれ求めよ.
- (2) $4 < a_n < 9$ を数学的帰納法を用いて示せ.
- (3) $c = f(c)$ を満たす正の実数 c を求めよ.
- (4) 上の (3) で決定した c に対して, $0 < c - a_{n+1} < \frac{c - a_n}{2}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を示せ.
- (5) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.