

2016年 理系全学部日程 第4問

4 n を自然数, k を 0 以上の整数とする. また, $f(x) = |x \sin(nx)|$, $x_k = \frac{k\pi}{n}$, $\alpha_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$ とする. 次の問いに答えよ.

(1) $T_k = \int_{x_k}^{\alpha_k} f(x) dx$ とする. T_k を n, k を用いて表し, 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n T_k$ を求めよ.

(2) $x_k \leq x \leq x_{k+1}$ の範囲で, 関数 $f(x)$ が最大値をとるときの x の値を β_k とする. $U_k = \int_{x_k}^{\beta_k} f(x) dx$ とおくと, ある定数 b を用いて $U_k = \frac{k\pi + b|\sin(n\beta_k)|}{n^2}$ と表される. 定数 b の値を求めよ. また, 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n U_k$ を求めよ.

(3) $x_k \leq x \leq \alpha_k$ の範囲で, 関数 $g(x) = |x \cos(nx)|$ が最大値をとるときの x の値を γ_k とする. この γ_k と (2) の β_k に対して, $V_k = \int_{\gamma_k}^{\beta_k} f(x) dx$ とおく. 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n V_k$ を求めよ.