

2016年文化情報・生命医科・スポーツ第4問

4 数列  $\{a_n\}$  を

$$a_1 = 5, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{6}{\sqrt{a_n}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める.  $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{6}{\sqrt{x}}$  ( $x > 0$ ) として, 次の問いに答えよ.

- (1) 閉区間  $4 \leq x \leq 9$  において,  $f(x)$  の最大値と最小値, 導関数  $f'(x)$  の最大値と最小値をそれぞれ求めよ.
- (2)  $4 < a_n < 9$  を数学的帰納法を用いて示せ.
- (3)  $c = f(c)$  を満たす正の実数  $c$  を求めよ.
- (4) 上の(3)で決定した  $c$  に対して,  $0 < c - a_{n+1} < \frac{c - a_n}{2}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を示せ.
- (5) 極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  を求めよ.