

2014年 理系全学部日程 第1問


1 次の に適する数または式を記入せよ。

袋の中に1から9までの数字が1つずつ書かれた9個の球が入っている。この袋から球を1個取り出し、取り出した球の数字を調べて袋に戻すことを2回行うとき、取り出した球に書かれた数字のうちの最大値を X とする。 X が3以下となる場合の数は 通りである。また、 X が4以下となる場合の数は 通りである。 X が3となる場合の数は 通りであるので、 X が3と等しくなる確率は である。したがって、 $i=1, 2, 3, \dots, 9$ に対して、 X が i と等しくなる確率は であり、 X の期待値は である。

次に、この袋から球を1個取り出し、取り出した球の数字を調べて袋に戻すことを k 回行うとき (k は自然数)、取り出した球に書かれた数字のうちの最大値を Y とする。 Y が j ($j=1, 2, 3, \dots, 9$) 以下となる場合の数は 通りであり、 Y が j と等しくなる場合の数は 通りである。したがって、 Y が j と等しくなる確率は であり、 Y の期待値は $9 - \frac{1}{9^k} \sum_{j=1}^8$ である。

$X \leq 3 \cdots (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (1, 3), (3, 1), (3, 2), (2, 3), (3, 3)$

\therefore 9通り

$X=4 \cdots (1, 4), (4, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 4), (4, 3), (4, 4) \cdots$ 7通り

$\therefore X \leq 4$ とおきの $9+7=16$ 通り

$X=3 \cdots (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 3) \cdots$ 5通り

$$\therefore P(X=3) = \frac{5}{9^2} = \frac{5}{81}$$

同様に $P(X=i) = \frac{2i-1}{9^2} = \frac{2i-1}{81}$

$$E(X) = \sum_{i=1}^9 i \cdot \frac{2i-1}{81} = \frac{1}{81} \sum_{i=1}^9 2i^2 - i = \frac{1}{81} \left\{ \frac{2}{6} \cdot 9 \cdot 10 \cdot 19 - \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 10 \right\} = \frac{175}{27}$$

$Y \leq j \cdots j^k$ 通り $Y=j \cdots j^k - (j-1)^k$ 通り

$$\therefore P(Y=j) = \frac{j^k - (j-1)^k}{9^k}$$

$$E(Y) = \sum_{j=1}^9 \left\{ \frac{j^k - (j-1)^k}{9^k} \right\} \cdot j = 9 - \frac{1}{9^k} \sum_{j=1}^8 j^k$$

Σ をばらして
考えると
分かりやすい