2016年 医学部 第5問

$\boxed{5}$ xy 平面上の放物線 $y=x^2$ の $0 \leqq x \leqq 1$ に対応する部分の長さを L とする．L の値を次のようにして求めよう．L は定積分

$$L=\int_0^1 \sqrt{1+\boxed{\text{ア}}\,x^2}\,dx$$

で定まる．この定積分を計算するために $x=\dfrac{e^t-e^{-t}}{4}$ として，置換積分を行う．このとき

$$\frac{dx}{dt}=\frac{e^t+e^{-t}}{4}$$

であり

$$\sqrt{1+\boxed{\text{ア}}\,x^2}=\frac{e^t+e^{-t}}{\boxed{\text{イ}}}$$

である．

また，$\dfrac{e^t-e^{-t}}{4}=1$ となる t の値を α とすると，x が $0 \to 1$ と変化するとき，t は $\boxed{\text{ウ}} \to \alpha$ と変化するので，L を定める定積分は

$$L=\frac{1}{\boxed{\text{エ}}}\int_{\boxed{\text{ウ}}}^{\alpha}(e^t+e^{-t})^{\boxed{\text{オ}}}\,dt$$

となる．ここで $X=e^{\alpha}$ とおくと，X は2次方程式

$$X^2-\boxed{\text{カ}}\,X-\boxed{\text{キ}}=0$$

の解である．$X>0$ なので

$$X=\boxed{\text{ク}}+\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$$

である．これを用いて α の値を定め，L の値を計算すると

$$L=\frac{\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}+\frac{1}{\boxed{\text{シ}}}\log\left(\boxed{\text{ス}}+\sqrt{\boxed{\text{セ}}}\right)$$

である．