

2015年医学部第5問

5  $x > -1$  で定義された関数  $f(x)$  は、等式

$$(x+1)f(x) - \int_0^x f(t) dt = \log(x+1) + x - 1$$

を満たしている。

(1) このとき  $f(0) =$   であり、さらに

$$f'(x) = \frac{x + \text{ウ}}{(x + \text{エ}) \text{オ}}$$

である。

(2) これをもとに  $f(x)$  を求めると  $f(x) =$    $-$   である。ただし、,  には、次の①～⑥の中から最も適切なものをそれぞれ一つ選ぶこと。なお、同じ選択肢を選んでもよいものとする。

- ①  $\log x$    ②  $\log(x+1)$    ③  $x \log(x+1)$    ④  $\frac{1}{x}$    ⑤  $\frac{1}{x+1}$    ⑥  $\frac{x}{x+1}$

(3)  $a > 0$  とする。関数  $g(x) = \log x$  について、区間  $[a, a+1]$  で平均値の定理を用いると、 $g(a+1) - g(a) =$   となる実数の定数  $c$  が区間  に存在する。これを用いると自然数  $m$  に対する  $f(e^m)$  と  $m$  の大小は  $f(e^m)$    $m$  となることがわかる。ただし、,  には、次の選択肢 I の①～⑦の中から、 には、選択肢 II の①～③の中から最も適切なものをそれぞれ一つずつ選ぶこと。

選択肢 I

- ①  $c$    ②  $c+1$    ③  $\frac{1}{c}$    ④  $\frac{1}{c+1}$    ⑤  $\log c$   
 ⑥  $[a, a+1]$    ⑦  $(a, a+1)$

選択肢 II

- ①  $<$    ②  $>$    ③  $=$

(4) さらに

$$\int_0^{e^x-1} f(t) dt = (x - \text{サ})(e^x - \text{シ})$$

となるので、自然数  $n$  に対して  $p(n) = e^{\frac{2}{3n}} - 1$  とおくと

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^{p(n)} f(t) dt = \frac{\text{スセ}}{\text{ソ}}$$

である。