2010 年 医学部 第 4 問

$\boxed{4}$ 原点を O とする座標平面上の動点 P の位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (x,\ y)$ が，時刻 t の関数として，$x = e^{-2t}\cos 2\pi t$，$y = e^{-2t}\sin 2\pi t$ で表されている．

(1) 点 P の速度ベクトル $\vec{v} = \left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ の大きさは，$|\vec{v}| = \boxed{}\sqrt{\boxed{} + \pi^2}e^{-2t}$ である．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\vec{v}$ のなす角を α とするとき，$\cos\alpha = \dfrac{\boxed{}}{\sqrt{\boxed{} + \pi^2}}$ であり，これは時刻 t によらない一定値である．

(3) n を自然数として，$t = n-1$ から $t = n$ までの間に点 P が動く道のり S_n は，

$$S_n = \sqrt{\boxed{} + \pi^2}\left(e^{\boxed{}} - \boxed{}\right)e^{-2n}$$

である．また，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sqrt{\boxed{} + \pi^2}$ である．

(4) $t = 0$ から $t = \dfrac{1}{4}$ までの間に点 P がえがく曲線と，x 軸，y 軸とで囲まれる図形の面積 I は，$I = \displaystyle\int_a^b y\,dx = \int_{\frac{1}{4}}^{0} y\frac{dx}{dt}\,dt$ で求められる．このとき $a = \boxed{}$，$b = \boxed{}$ で，$I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-4t}\{\sin \boxed{\ *\ }\pi t + \pi(1 - \cos \boxed{\ *\ }\pi t)\}\,dt$ である．