獨協医科大学

2016年 医学部 第5問

5 xy 平面上の放物線 $y = x^2$ の $0 \leqq x \leqq 1$ に対応する部分の長さを L とする．L の値を次のようにして求めよう．L は定積分

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \boxed{\text{ア}}\, x^2}\, dx$$

で定まる．この定積分を計算するために $x = \dfrac{e^t - e^{-t}}{4}$ として，置換積分を行う．このとき

$$\frac{dx}{dt} = \frac{e^t + e^{-t}}{4}$$

であり

$$\sqrt{1 + \boxed{\text{ア}}\, x^2} = \frac{e^t + e^{-t}}{\boxed{\text{イ}}}$$

である．

また，$\dfrac{e^t - e^{-t}}{4} = 1$ となる t の値を α とすると，x が $0 \to 1$ と変化するとき，t は $\boxed{\text{ウ}} \to \alpha$ と変化するので，L を定める定積分は

$$L = \frac{1}{\boxed{\text{エ}}} \int_{\boxed{\text{ウ}}}^{\alpha} (e^t + e^{-t})^{\boxed{\text{オ}}}\, dt$$

となる．ここで $X = e^{\alpha}$ とおくと，X は2次方程式

$$X^2 - \boxed{\text{カ}}\, X - \boxed{\text{キ}} = 0$$

の解である．$X > 0$ なので

$$X = \boxed{\text{ク}} + \sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$$

である．これを用いて α の値を定め，L の値を計算すると

$$L = \frac{\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}} + \frac{1}{\boxed{\text{シ}}} \log\left(\boxed{\text{ス}} + \sqrt{\boxed{\text{セ}}}\right)$$

である．