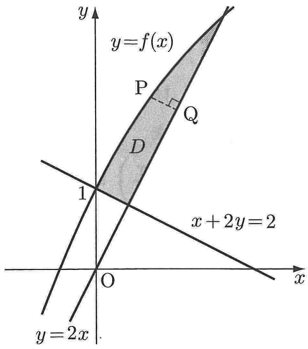
2014年 医学部 第5問

$\boxed{5}$ 関数 $f(x) = 2x + \cos x$ がある．$xy$ 平面上の曲線 $y = f(x)$ の $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分を $C$ とし，$C$ と直線 $y = 2x$，および直線 $x + 2y = 2$ で囲まれた領域を $D$ とする．領域 $D$ を直線 $y = 2x$ の周りに1回転してできる立体の体積を求めよう．




$C$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ から直線 $y = 2x$ に下ろした垂線と直線 $y = 2x$ との交点を Q とする．

線分 PQ の長さは

$$\frac{|\cos t|}{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}$$

であり，点 Q の $x$ 座標は

$$t + \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\cos t$$

である．これから，OQ $= s$ とおくと

$$s = \sqrt{\boxed{\text{エ}}}\left(t + \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\cos t\right)$$

である．

$f'(x) = 2 - \sin x > 0$ なので $f(x)$ は増加する．よって，求める体積 $V$ は

$$V = \int_{\frac{2\sqrt{5}}{5}}^{\frac{\sqrt{5}\pi}{2}} \pi \mathrm{PQ}^2\, ds$$

$$= \frac{\sqrt{\boxed{\text{オ}}}\,\pi}{\boxed{\text{カ}}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2 t - \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\cos^2 t \sin t\right) dt$$

$$= \frac{\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}\,\pi^2}{\boxed{\text{コサ}}} - \frac{\boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}\,\pi}{\boxed{\text{セソ}}}$$

である．