2014 年 医学部 第 3 問

$\boxed{3}$ 空間に，同一直線上にない 3 点 O，A，B があり，条件

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = 2,\quad |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 1\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = -1$$

を満たしている．O，A，B を通る平面を α とし，α 上にない点 P を次の条件を満たすようにとる．

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 2,\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = -1$$

点 P から平面 α に下ろした垂線と α との交点を H とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

となる．$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = p$ とおくと，△OPH の面積は

$$\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}\,p^2 - \boxed{\text{ク}}}$$

と表される．

△OAB の面積が △OPH の面積の 2 倍に等しいとき

$$p^2 = \frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$$

である．またこのとき，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \dfrac{5}{3}\overrightarrow{\mathrm{PO}}$ を満たす点 Q をとると，四面体 QOAH の体積は

$$\frac{\sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セソ}}}$$

である．