0001803186918999

獨協大学

2014年 文系 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 数列 $\{a_n\}$ と数列 $\{b_n\}$ が以下の条件を満たすとする.

$$a_1 = 3,\ b_1 = 2,\ a_{n+1} = 4a_n + b_n,\ b_{n+1} = a_n + 4b_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき，次の問題に答えよ.

(1) $c_n = a_n - b_n$ ($n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$) で定められる数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ.

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(1) 漸化式の両辺をそれぞれ

引くと. $a_{n+1} - b_{n+1} = 3(a_n - b_n)$ $\therefore c_{n+1} = 3c_n$

$\{c_n\}$ は初項 $c_1 = a_1 - b_1 = 1$，公比 3 の等比数列なので

$\underline{c_n = 3^{n-1}}$ //

(2) $a_n - b_n = 3^{n-1}$ を. $a_{n+1} = 4a_n + b_n$ に代入して

$a_{n+1} = 4a_n + a_n - 3^{n-1}$ $\therefore a_{n+1} = 5a_n - 3^{n-1}$

両辺を 3^{n+1} でわると. $\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \dfrac{5}{3} \cdot \dfrac{a_n}{3^n} - \dfrac{1}{9}$

$d_n = \dfrac{a_n}{3^n}$ とおくと $d_{n+1} = \dfrac{5}{3}d_n - \dfrac{1}{9}$

$\therefore d_{n+1} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{3}\left(d_n - \dfrac{1}{6}\right)$

$\therefore \left\{d_n - \dfrac{1}{6}\right\}$ は初項 $\dfrac{a_1}{3} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}$，公比 $\dfrac{5}{3}$ の等比数列

$\therefore d_n - \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6} \cdot \left(\dfrac{5}{3}\right)^{n-1}$ $\therefore d_n = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{5}{3}\right)^n$

$\therefore a_n = \dfrac{3^n}{6} + \dfrac{1}{2} \cdot 5^n = \underline{\dfrac{3^n + 3 \cdot 5^n}{6}}$ //