

2015年 第2問

2 関数  $f(t)$ ,  $g(t)$  を次のように定義する。ただし,  $e$  は自然対数の底とする。

$$f(t) = (t-1)e^{-t}, \quad g(t) = (t-1)^2e^{-t}$$

$xy$  平面上の曲線  $C$  が, 媒介変数  $t$  を用いて

$$x = f(t), \quad y = g(t) \quad (1 \leq t \leq 3)$$

と表されるとき, 以下の問いに答えよ。

- (1)  $f(t) = g(t)$  となる  $t$  の値を  $\alpha$ ,  $\beta$  ( $\alpha < \beta$ ) とする。  $\alpha$ ,  $\beta$  の値を求めよ。さらに,  $\alpha \leq t \leq \beta$  のとき,  $f(t) \geq g(t)$  であることを示せ。
- (2) 導関数  $f'(t)$ ,  $g'(t)$  をそれぞれ求めよ。さらに, 区間  $\alpha \leq t \leq \beta$  において, 関数  $f(t)$ ,  $g(t)$  がともに単調に増加することを示せ。
- (3) 次の定積分をそれぞれ求めよ。

$$I_1 = \int_0^1 ue^{-2u} du, \quad I_2 = \int_0^1 u^2 e^{-2u} du, \quad I_3 = \int_0^1 u^3 e^{-2u} du$$

- (4) 曲線  $C$  と直線  $y = x$  で囲まれた図形の面積  $S$  を求めよ。