

2010年第4問

4 実数  $a$  に対し,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a-2 \\ a+1 & -3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) すべての  $a$  に対して  $A$  が逆行列をもつことを示し、 $A$  の逆行列を求めよ。
- (2)  $E - A$  が逆行列をもたないような  $a$  の値を求めよ。

以下では、 $a$  を (2) で求めた値のうち正のものとする。

- (3)  $A \begin{pmatrix} b \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 3 \end{pmatrix}$  となる  $b$  を求めよ。また、 $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  となる  $k$  を求めよ。
- (4)  $b$  を (3) で求めた値とし、 $P = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$  とする。 $AP = PQ$  となる2次の正方行列  $Q$  を求めよ。
- (5) 自然数  $n$  に対して  $A^n$  を求めよ。