

2010年工学域(中期)第3問

3 座標平面上において、点 (x, y) から点 $(x+1, y)$ または点 $(x, y+1)$ への移動を N 型移動といい、点 (x, y) から点 $(x+1, y+1)$ への移動を S 型移動という。 n を 3 以上の整数とする。原点 O から出発し、 $2n-2$ 回の N 型移動と 1 回の S 型移動を組合せて点 (n, n) に到達する経路の総数を $A(n)$ とする。また、このような経路のうち、S 型移動を k 回目の移動として含む経路の総数を $B(n, k)$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $A(3)$ を求めよ。
- (2) $B(4, 1)$, $B(4, 2)$ をそれぞれ求めよ。
- (3) $B(n, 1)$ を n を用いて表せ。
- (4) 一般の $k = 1, 2, 3, \dots, 2n-1$ に対して、 $B(n, k)$ を n, k を用いて表せ。
- (5) $A(n)$ を n を用いて表せ。

ただし、 p, q, r を非負の整数とし、 $p \leq q \leq r$ とするとき、

$$\sum_{i=0}^p pC_i \cdot rC_{q-i} = p+rC_q$$

が成り立つことを用いてもよい。