

2012年薬学部第6問

6 円 $x^2 + (y - a)^2 = r^2$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を $V(a)$ とするとき、次の問いに答えよ。ただし、 a, r は正の実数とする。

(1) $a \geq r$ のとき、 $V(a)$ を求めよ。

(2) $0 < a < r$ とする。

(i) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき、 $\sin \theta < \theta < \tan \theta$ が成り立つ。このことを用いて、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{(r+a)\sqrt{r^2-a^2}}{2} < \int_0^{\sqrt{r^2-a^2}} \sqrt{r^2-x^2} dx < \frac{(r^2+a^2)\sqrt{r^2-a^2}}{2a}$$

(ii) (i) の結果を用いて、

$$\frac{2\pi(a-r)(a+r)\sqrt{r^2-a^2}}{3} < V(a) - 2\pi^2 ar^2 < \frac{2\pi(a-r)(a-2r)\sqrt{r^2-a^2}}{3}$$

が成り立つことを示せ。