0001915724808999

大同大学

2013年 工・情報学部 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 次の $\boxed{}$ にあてはまる0から9までの数字を記入せよ．ただし，根号内の平方因数は根号外にくくり出し，分数は既約分数で表すこと．

(1) $\dfrac{(\alpha+\beta)^3-(\alpha^3+\beta^3)}{\alpha+\beta} = \boxed{3}\,\alpha\beta$ である．$a = \sqrt[3]{48}+\sqrt[3]{36}$ のとき $\dfrac{a^3-84}{a} = \boxed{3}\boxed{6}$ であり，$b = \sqrt[3]{10+\sqrt{19}}+\sqrt[3]{10-\sqrt{19}}$ のとき $\log_{81}\dfrac{b^3-20}{b} = \dfrac{\boxed{7}}{\boxed{1}\boxed{2}}$ である．

(2) AB = 1，BC = 2，CD = 1，DA = 1 の台形 ABCD において $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = -\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$ であり，対角線 AC と BD の交点を E とすると，$\overrightarrow{AE} = \dfrac{\boxed{1}}{\boxed{3}}\overrightarrow{AB} + \dfrac{\boxed{2}}{\boxed{3}}\overrightarrow{AD}$ である．さらに，台形 ABCD を底面にもつ四角錐 ABCDF の頂点 F から底面 ABCD に下ろした垂線の足が E と一致し EF = 2 であるとき，$\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FD} = \dfrac{\boxed{2}\boxed{3}}{\boxed{6}}$ である．

(1) $(\alpha+\beta)^3-(\alpha^3+\beta^3) = \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3-\alpha^3-\beta^3$

$= 3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$\therefore \dfrac{(\alpha+\beta)^3-(\alpha^3+\beta^3)}{\alpha+\beta} = \underline{3\alpha\beta}$ //

$\alpha=\sqrt[3]{48}$，$\beta=\sqrt[3]{36}$ とおくと，$a=\alpha+\beta$ これを上の式に代入して．

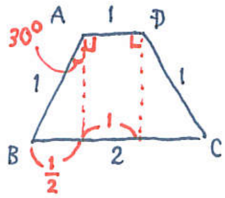
$\dfrac{a^3-(48+36)}{a} = 3\cdot\sqrt[3]{48}\cdot\sqrt[3]{36}$ $\quad\therefore \dfrac{a^3-84}{a} = \underline{36}$ //

$\alpha=\sqrt[3]{10+\sqrt{19}}$，$\beta=\sqrt[3]{10-\sqrt{19}}$ とおくと，$b=\alpha+\beta$ これを上の式に代入して．

$\dfrac{b^3-(10+\sqrt{19}+10-\sqrt{19})}{b} = 3\sqrt[3]{10+\sqrt{19}}\sqrt[3]{10-\sqrt{19}}$．$\quad\therefore \dfrac{b^3-20}{b} = 3\sqrt[3]{100-19} = 3^{\frac{7}{3}}$

$\therefore \log_{81}\dfrac{b^3-20}{b} = \log_{81}3^{\frac{7}{3}} = \dfrac{\log_3 3^{\frac{7}{3}}}{\log_3 3^4} = \underline{\dfrac{7}{12}}$ // (底の変換公式より)

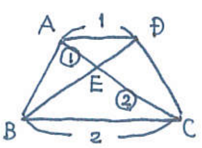
(2) 台形ABCDは等脚台形で $\angle A = 120^\circ$ となる．



$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 1\cdot1\cdot\cos120^\circ = \underline{-\dfrac{1}{2}}$ //

$\triangle$EAD と ECB は相似なので，AE : EC = 1 : 2

また，$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ より．$\underline{\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}}$ //



$\therefore |\overrightarrow{AE}|^2 = \dfrac{1}{9}+\dfrac{4}{9}+\dfrac{4}{9}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{3}$ $\quad\therefore |\overrightarrow{AE}| = |\overrightarrow{DE}| = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

三平方の定理より．$|\overrightarrow{FA}| = |\overrightarrow{FD}| = \sqrt{\dfrac{13}{3}}$ $\quad\therefore \overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FD} = \sqrt{\dfrac{13}{3}}\cdot\sqrt{\dfrac{13}{3}}\cdot\dfrac{\frac{13}{3}+\frac{13}{3}-1}{2\sqrt{\frac{13}{3}}\cdot\sqrt{\frac{13}{3}}} = \underline{\dfrac{23}{6}}$ //