

2015年 全学部2月3日 第3問

3 以下の問いに答えよ。

(1)  $x, y, z$  を 0 でない実数とする。  $2^x = 3^y = 6^z$  のとき、  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z}$  を求めよ。(2)  $y = 2^x + 3 \cdot 2^{-x}$  の最小値を求めよ。

$$(1) 2^x = 3^y \text{ の両辺, 底が } 2 \text{ の対数をとって. } x = y \cdot \log_2 3 \quad \therefore y = \frac{x}{\log_2 3} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$2^x = 6^z \text{ の両辺, 底が } 2 \text{ の対数をとって. } x = z \cdot \log_2 6 \quad \therefore z = \frac{x}{\log_2 6} \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② より.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} &= \frac{1}{x} + \frac{\log_2 3}{x} - \frac{\log_2 6}{x} \\ &= \frac{\log_2 \frac{2 \cdot 3}{6}}{x} \\ &= \underline{\underline{0}} \end{aligned}$$

(2)  $2^x > 0, 3 \cdot 2^{-x} > 0$  なので, 相加・相乗平均の関係より

$$\begin{aligned} 2^x + 3 \cdot 2^{-x} &\geq 2\sqrt{2^x \cdot 3 \cdot 2^{-x}} \\ &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\text{等号成立は, } 2^x = 3 \cdot 2^{-x} \Leftrightarrow (2^x)^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow 2^x = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \log_2 3 \text{ のとき.}$$

$$\therefore y \text{ の最小値は } \underline{\underline{2\sqrt{3}}} \text{ (} x = \frac{1}{2} \log_2 3 \text{ のとき)}$$