



2012 年 理工（一般）第 3 問

3 座標平面において、原点  $O(0, 0)$  を中心とする半径 1 の円を  $C_0$  とし、点  $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$  を中心とする半径が  $\frac{1}{2}$  の円を  $C_1$  とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 円  $C_0$  と内接し、円  $C_1$  と外接する円  $D$  の半径を  $r$ ，中心  $G$  の座標を  $(\alpha, \beta)$  とするとき， $r$  を  $\alpha$  によって表せ。
- (2) 中心  $G(\alpha, \beta)$  の軌跡の方程式を求めよ。  
 以上で考察した円  $D$  は無数にあるが，これらの円はどれも点  $B\left(\frac{1}{3}, 0\right)$  を中心とする半径  $\frac{2}{3}$  の円  $C_2$  と特別な位置関係にある。以下ではこのことを調べてみよう。円  $D$  と円  $C_2$  の 2 つの交点を  $P, Q$  とする。
- (3) 直線  $PQ$  の方程式を  $\alpha, \beta$  により表せ。
- (4) 点  $P$  の座標  $(X, Y)$  が直線  $PQ$  の方程式と円  $C_2$  の方程式を満たしていることを利用して， $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{GP} = 0$  を示せ。