中央大学

2012年 理工（一般） 第2問

$\boxed{2}$ 次の問題文の空欄にもっとも適する答えを解答群から選び，その記号をマークせよ．ただし，同じ記号を2度以上用いてもよい．

a を1より大きい実数とする．xy 平面において，x 軸，y 軸，直線 $x=1$ と曲線 $y=a^x$ で囲まれる部分の面積を近似的に計算したい．n を自然数とし，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ とする．また，$f(x)$ は $0 \leqq x \leqq 1$ において $f(x)>0$ を満たす連続関数とする．

(1) 4点 $\left(\dfrac{k-1}{n},\ 0\right)$，$\left(\dfrac{k}{n},\ 0\right)$，$\left(\dfrac{k}{n},\ f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right)$，$\left(\dfrac{k-1}{n},\ f\left(\dfrac{k-1}{n}\right)\right)$ を頂点にもつ台形の面積を M_k とする．このとき $M_k=\boxed{\text{キ}}$ となる．とくに $f(x)=a^x$ であれば，面積の和 $S_n=M_1+M_2+\cdots+M_n$ は $\boxed{\text{ク}}$ となる．ここで，極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\boxed{\text{ケ}}$ を用いると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\boxed{\text{コ}}$ と計算される．

(2) 以下では，曲線 $y=f(x)$ は下に凸とする．
3点 $\left(\dfrac{k-1}{n},\ f\left(\dfrac{k-1}{n}\right)\right)$，$\left(\dfrac{2k-1}{2n},\ f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\right)$，$\left(\dfrac{k}{n},\ f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right)$ を通る放物線を

$$C_k : y=\alpha\left(x-\frac{2k-1}{2n}\right)^2+\beta\left(x-\frac{2k-1}{2n}\right)+\gamma \quad (\alpha,\ \beta,\ \gamma \text{は定数})$$

とおく．x 軸，直線 $x=\dfrac{k-1}{n}$，直線 $x=\dfrac{k}{n}$ と放物線 C_k で囲まれる部分の面積を N_k とおくとき，$N_k=\boxed{\text{サ}}$ となる．とくに $f(x)=a^x$ であれば，面積の和 $N_1+N_2+\cdots N_n$ は $\boxed{\text{シ}}$ となる．

- ケ，コの解答群

ⓐ e^a　ⓑ e^{-a}　ⓒ $\dfrac{e^a}{a-1}$　ⓓ $(a-1)e^a$　ⓔ $(a-1)e^{-a}$

ⓕ $\log a$　ⓖ $\dfrac{1}{\log a}$　ⓗ $\dfrac{\log a}{a-1}$　ⓘ $\dfrac{a-1}{\log a}$　ⓙ $(a-1)\log a$

- キ，サの解答群

ⓐ $\dfrac{1}{n}\left\{f\left(\dfrac{k-1}{n}\right)+f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right\}$

ⓑ $\dfrac{1}{2n}\left\{f\left(\dfrac{k-1}{n}\right)+f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right\}$

ⓒ $\dfrac{1}{3n}\left\{f\left(\dfrac{k-1}{n}\right)+f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)+f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right\}$

ⓓ $\dfrac{1}{4n}\left\{f\left(\dfrac{k-1}{n}\right)+2f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)+f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right\}$

ⓔ $\dfrac{1}{5n}\left\{f\left(\dfrac{k-1}{n}\right)+3f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)+f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right\}$

ⓕ $\dfrac{1}{6n}\left\{f\left(\dfrac{k-1}{n}\right)+4f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)+f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right\}$

- ク，シの解答群

ⓐ $\dfrac{(a^n-1)\sqrt{a}}{n(a-1)}$　ⓑ $\dfrac{a^{\frac{1}{2n}}(a-1)}{n(a^{\frac{1}{n}}-1)}$

ⓒ $\dfrac{(a+1)(a^n-1)}{n(a-1)}$　ⓓ $\dfrac{(a^{\frac{1}{n}}+1)(a-1)}{n(a^{\frac{1}{n}}-1)}$

ⓔ $\dfrac{(a+1)(a^n-1)}{2n(a-1)}$　ⓕ $\dfrac{(a^{\frac{1}{n}}+1)(a-1)}{2n(a^{\frac{1}{n}}-1)}$

ⓖ $\dfrac{(a^{\frac{1}{n}}+a^{\frac{1}{2n}}+1)(a-1)}{n(a^{\frac{1}{n}}-1)}$　ⓗ $\dfrac{(a^{\frac{1}{n}}+a^{\frac{1}{2n}}+1)(a-1)}{3n(a^{\frac{1}{n}}-1)}$

ⓘ $\dfrac{(a^{\frac{1}{n}}+2a^{\frac{1}{2n}}+1)(a-1)}{4n(a^{\frac{1}{n}}-1)}$　ⓙ $\dfrac{(a+3\sqrt{a}+1)(a^n-1)}{5n(a-1)}$

ⓚ $\dfrac{(a^{\frac{1}{n}}+4a^{\frac{1}{2n}}+1)(a-1)}{6n(a^{\frac{1}{n}}-1)}$