中央大学

2012年 理工（一般） 第1問

$\boxed{1}$ 次の問題文の空欄にもっとも適する答えを解答群から選び，その記号をマークせよ．ただし，同じ記号を2度以上用いてもよい．

a，b，r，k は $a > b > 0$，$r > 0$，$k > 0$ を満たす定数とする．

座標平面の相異なる3点A，B，Cが円 $X^2 + Y^2 = r^2$ の上を動くとき，△ABCの面積 S_1 の最大値は次のようにして求められる．まず，2点B，Cを固定して点Aを動かすとき，その三角形の高さに注意すれば，面積が最大となるのは，AB = ACであるような二等辺三角形のときである．したがって，この円に内接する二等辺三角形のうちで面積が最大のものを見つければよい．そこで，$\mathrm{A}(0,\ r)$，$\mathrm{B}(-r\cos\theta,\ r\sin\theta)$，$\mathrm{C}(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とすれば S_1 の最大値は $\sin\theta = \boxed{\text{ア}}$ のとき $S_1 = \boxed{\text{イ}}\, r^2$ であることがわかる．

点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の y 座標を k 倍した点を $\mathrm{P}'(x,\ ky)$ とおく．相異なる3点A，B，Cの座標を $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$，$\mathrm{C}(x_3,\ y_3)$ としたとき，△ABCの面積 S は内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて計算すると $\boxed{\text{ウ}}$ と表される．したがって，点 $\mathrm{A}'(x_1,\ ky_1)$，$\mathrm{B}'(x_2,\ ky_2)$，$\mathrm{C}'(x_3,\ ky_3)$ のなす三角形の面積を S_2 とおくと，S_2 は S の $\boxed{\text{エ}}$ 倍である．

点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は楕円 E : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ の上を動く点とする．$k = \dfrac{a}{b}$ であるとき，点 $\mathrm{P}'(x,\ ky)$ は原点を中心とする半径 $\boxed{\text{オ}}$ の円上を動く．したがって，相異なる3点A，B，Cが楕円 E 上を動くとき，△ABCの面積の最大値は a，b を用いて $\boxed{\text{カ}}$ と表される．

- ア，イの解答群

ⓐ $-\dfrac{1}{2}$　ⓑ $-\dfrac{1}{3}$　ⓒ $\dfrac{1}{3}$　ⓓ $\dfrac{1}{2}$　ⓔ $\dfrac{16}{9}$

ⓕ $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　ⓖ $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　ⓗ $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　ⓘ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　ⓙ $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

ⓚ $\dfrac{8\sqrt{2}}{9}$　ⓛ $\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$　ⓜ $\dfrac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{3}$

- ウの解答群

ⓐ $\left|(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) + (y_2 - y_1)(y_3 - y_1)\right|$

ⓑ $\dfrac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) + (y_2 - y_1)(y_3 - y_1)\right|$

ⓒ $\left|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right|$

ⓓ $\dfrac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right|$

ⓔ $\left|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right|$

ⓕ $\dfrac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right|$

ⓖ $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}$

$-\{(x_2-x_1)(x_3-x_1)+(y_2-y_1)(y_3-y_1)\}$

ⓗ $\frac{1}{2}\Big[\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2}$
$-\{(x_2-x_1)(x_3-x_1)+(y_2-y_1)(y_3-y_1)\}\Big]$

- エの解答群

ⓐ $\frac{1}{k^3}$ ⓑ $\frac{1}{k^2}$ ⓒ $\frac{1}{k}$ ⓓ $\frac{2}{k}$ ⓔ $\frac{k}{2}$ ⓕ k ⓖ k^2 ⓗ k^3

- オの解答群

ⓐ $\frac{a}{2}$ ⓑ $\frac{a^2}{4}$ ⓒ a ⓓ a^2 ⓔ ab
ⓕ $\frac{b}{2}$ ⓖ $\frac{b^2}{4}$ ⓗ b ⓘ b^2 ⓙ $(ab)^2$

- カの解答群

ⓐ $\frac{\sqrt{3}}{2}ab$ ⓑ $\frac{8\sqrt{2}}{9}ab$ ⓒ $\frac{\sqrt{3}}{4}ab$ ⓓ $\frac{16}{9}ab$ ⓔ $\frac{3\sqrt{3}}{4}ab$

ⓕ $\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{a^3}{b}$ ⓖ $\frac{8\sqrt{2}}{9}\frac{a^3}{b}$ ⓗ $\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{a^3}{b}$ ⓘ $\frac{16}{9}\frac{a^3}{b}$ ⓙ $\frac{3\sqrt{3}}{4}\frac{a^3}{b}$