2012 年 理工（理数選抜） 第 3 問

$\boxed{3}$ $h>0$，$d \geqq 0$ とし，座標空間において 4 点 A(0, 0, 1)，B(0, 0, −1)，C(h, 0, $-d$)，D(0, h, d) を頂点とする四面体を考える．さらに CD = 2 とする．したがって，四面体の 6 本の辺のうち向かい合う 2 辺の長さは 3 組とも互いに等しい．つまり

AB = CD,　AC = BD,　AD = BC

となっており，4 つの面はすべて互いに合同である．この四面体 ABCD について以下の問いに答えよ．

(1) h を d で表し，d のとりうる値の範囲を求めよ．

点 A を通り平面 BCD に垂直な直線と平面 BCD の交点を P とおく．この点 P を点 A から平面 BCD に下ろした垂線の足とよぶ．同様に，点 B から平面 ACD に下ろした垂線の足を Q，点 C から平面 ABD へ下ろした垂線の足を R，点 D から平面 ABC へ下ろした垂線の足を S とおく．

(2) 点 R，S は直線 AB 上にあることに注意して，R，S の座標を d で表せ．また，四面体 ABCD の対称性を考慮して，点 P，Q の座標を d で表せ．さらに，計算により $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BQ}} = 0$ を確認せよ．

(3) 辺 BD の長さのとりうる値の範囲を求めよ．

(4) 平面 ABC と平面 ACD が直線 AC に沿って角度 θ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ で交わっている．θ のとりうる値の範囲を求めよ．ただし 2 平面の交わる角度とは，それぞれの平面に直交する 2 直線のなす角度である．