2015年 工学部 第4問

4 次の問いに答えよ．

(1) すべての自然数kに対して，

$$\frac{2k+6}{k^3+3k^2+2k}=\frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}+\frac{c}{k+2}$$

が成り立つように，定数a，b，cの値を決定せよ．

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+6}{k^3+3k^2+2k}$ を求めよ．

(1) 与式の両辺に，$k(k+1)(k+2)$をかけて

$$2k+6=a(k+1)(k+2)+bk(k+2)+ck(k+1)$$

整理すると，

$$(a+b+c)k^2+(3a+2b+c-2)k+2a-6=0$$

これがkについての恒等式であるから

$$\begin{cases} a+b+c=0 & \cdots① \\ 3a+2b+c=2 & \cdots② \\ 2a-6=0 & \cdots③ \end{cases}$$

③より $a=3$

これを①，②にそれぞれ代入して $\begin{cases} b+c=-3 \\ 2b+c=-7 \end{cases}$

$\therefore\ \underline{a=3,\ b=-4,\ c=1}$ //

(2) $$(与式)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{k}-\frac{4}{k+1}+\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=3\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=3\left\{\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$-\left\{\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n+1}}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=3\left(1-\frac{1}{n+1}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\underline{\frac{n(5n+11)}{2(n+1)(n+2)}}$$ //