2016 年 工・情報科学・社シス科学 第 4 問

$\boxed{4}$ x の 2 次関数 $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$, … を条件

$$f_1(x) = x^2 - 5x,$$
$$f_{n+1}(x) = x^2\int_0^2 \{t f_n{}'(t) - f_n(t)\}\,dt + x\int_0^2 f_n(t)\,dt \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める．さらに，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を

$$f_n(x) = a_n x^2 + b_n x$$

により定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f_n{}'(x) = \boxed{\text{ア}}\, a_n x + b_n$ であり，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は

$$a_{n+1} = \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}a_n, \quad b_{n+1} = \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}a_n + \boxed{\text{カ}}\, b_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

をみたす．

(2) $a_n = \left(\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\right)^{n-1}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ であり，$c_n = \dfrac{b_n}{\boxed{\text{カ}}^{\,n-1}}$ とおくと，$c_{n+1} - c_n = \left(\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\right)^{n}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つ．

(3) $f_n(x) = \left(\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\right)^{n-1} x^2 + \left\{\boxed{\text{サ}} \cdot \left(\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}\right)^{n-1} - \boxed{\text{セ}} \cdot \boxed{\text{ソ}}^{\,n-1}\right\} x$ である．

(4) x の方程式 $f_n(x) = 0$ の $x = 0$ とは異なる解を $x = p_n$ とする．不等式 $p_n > M$ がすべての正の整数 n に対して成り立つような定数 M のうち，最大の整数は $M = \boxed{\text{タチ}}$ であり，$\boxed{\text{タチ}} < p_n < \boxed{\text{タチ}} + 1$ となるような最小の n は $\boxed{\text{ツ}}$ である．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする．