0001812187818999

千葉工業大学

2014年 工・情報科学・社シス科学 第4問　　1枚目/2枚　　数理 石井K

$\boxed{4}$ xy平面上に放物線$C：y=\frac{1}{4}x^2+4$と点$\mathrm{P}(p,\ 0)$がある．ただし，$p \geqq 0$とする．C上の点$\left(p,\ \frac{1}{4}p^2+4\right)$における$C$の接線を$\ell$とし，$\ell$に関して，Pと対称な点を$\mathrm{Q}(X,\ Y)$とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $p=0$のとき，$\mathrm{Q}(0,\ \boxed{\text{ア}})$である．　8

(2) ℓの方程式は$y=\dfrac{p}{\boxed{\text{イ}}}x-\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}p^2+\boxed{\text{オ}}$である．線分PQの中点が$\ell$上にあることから　イ 2，ウ 1，エ 4，オ 4

$$Y=\frac{p}{\boxed{\text{カ}}}X+\boxed{\text{キ}} \qquad \cdots\cdots(*)$$

が成り立つ．　カ 2，キ 8

(3) $p>0$のとき，Qが，Pを通りℓと直交する直線上にあることから

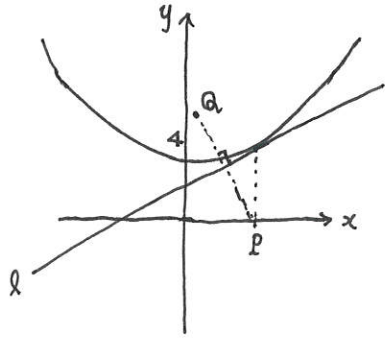
$$Y=\frac{\boxed{\text{クケ}}}{p}X+\boxed{\text{コ}} \qquad \cdots\cdots(**)$$

が成り立つ．$(*)$と$(**)$からpを消去することにより　クケ −2，コ 2

$$X^2+Y^2-\boxed{\text{サシ}}\,Y+\boxed{\text{スセ}}=0$$

が成り立つことがわかる．　サシ 10，スセ 16

(4) Xの最小値は$\boxed{\text{ソタ}}$であり，このとき$p=\boxed{\text{チ}}$である．pが0から$\boxed{\text{チ}}$まで変化するとき，線分PQが通過する部分の面積は$\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}\pi+\dfrac{\boxed{\text{トナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$である．　ソタ −3，チ 2，チ 2，ツ 9，テ 4，トナ 13，ニ 2



(1) $p=0$のとき．$\ell：y=4$ より．$\underline{\mathrm{Q}(0,8)}$ //

(2) $y'=\frac{1}{2}x$ より．$\ell：y=\frac{1}{2}p(x-p)+\frac{1}{4}p^2+4$

$\therefore\ \underline{\ell：y=\frac{p}{2}x-\frac{1}{4}p^2+4}$ //

線分PQの中点は$\left(\frac{X+p}{2},\ \frac{Y}{2}\right)$より　$\frac{Y}{2}=\frac{p}{2}\cdot\frac{X+p}{2}-\frac{1}{4}p^2+4$

$\therefore\ \underline{Y=\frac{p}{2}X+8}$ //

(3) PQの傾きは．$\frac{Y}{X-p}$　ℓの傾きは$\frac{p}{2}$より　$\frac{Y}{X-p}\cdot\frac{p}{2}=-1$　$\therefore\ \underline{Y=-\frac{2}{p}X+2}$ //

pを消去して，$\underline{X^2+Y^2-10Y+16=0}$ //

2枚目につづく

2014年 工・情報科学・社シス科学 第4問　　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{4}$ xy 平面上に放物線 $C: y=\frac{1}{4}x^2+4$ と点 $\mathrm{P}(p,\ 0)$ がある．ただし，$p \geqq 0$ とする．C 上の点 $\left(p,\ \frac{1}{4}p^2+4\right)$ における C の接線を ℓ とし，ℓ に関して，P と対称な点を $\mathrm{Q}(X,\ Y)$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $p=0$ のとき，$\mathrm{Q}(0,\ \boxed{ア})$ である．

(2) ℓ の方程式は $y=\frac{p}{\boxed{イ}}x-\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}p^2+\boxed{オ}$ である．線分 PQ の中点が ℓ 上にあることから

$$Y=\frac{p}{\boxed{カ}}X+\boxed{キ} \qquad \cdots\cdots(*)$$

が成り立つ．

(3) $p>0$ のとき，Q が，P を通り ℓ と直交する直線上にあることから

$$Y=\frac{\boxed{クケ}}{p}X+\boxed{コ} \qquad \cdots\cdots(**)$$

が成り立つ．$(*)$ と $(**)$ から p を消去することにより

$$X^2+Y^2-\boxed{サシ}Y+\boxed{スセ}=0$$

が成り立つことがわかる．

(4) X の最小値は $\boxed{ソタ}$ であり，このとき $p=\boxed{チ}$ である．p が 0 から $\boxed{チ}$ まで変化するとき，線分 PQ が通過する部分の面積は $\frac{\boxed{ツ}}{\boxed{テ}}\pi+\frac{\boxed{トナ}}{\boxed{ニ}}$ である．

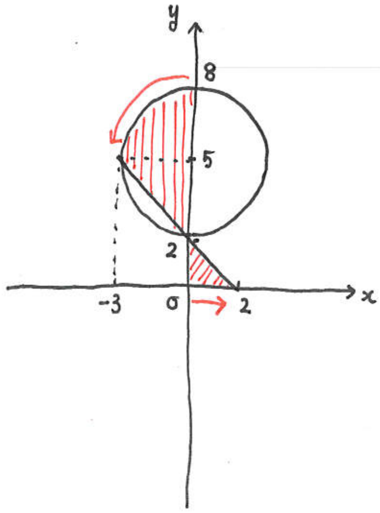
(4) $(*)$ と $(**)$ から Y を消去して $\left(\frac{p}{2}+\frac{2}{p}\right)X=-6$

$p>0$ より，相加・相乗平均の関係により $\frac{p}{2}+\frac{2}{p} \geqq 2\sqrt{\frac{p}{2}\cdot\frac{2}{p}}=2$

$\therefore$ $\underline{X \geqq -3}$ //　　等号成立は $\underline{p=2}$ //

(3) より，X, Y は円 $X^2+(Y-5)^2=3^2$ 上の点なので，

線分 PQ は右の斜線部分を通過する．



$\therefore$ $S=$ (半径3の円の $\frac{1}{4}$) + (直角三角形 2つ)

$=\pi\cdot 3^2\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2$

$=\underline{\frac{9}{4}\pi+\frac{13}{2}}$ //