



2015年人間科学学部(文系)第2問

2 三角形OABにおいてOA = 4, OB = 5, AB = 6とする。三角形OABの外心をHとするとき

$$\vec{OH} = \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\overset{3}{\vec{OA}} + \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\overset{16}{\vec{OB}}$$

である。

$$\vec{OH} = s\vec{OA} + t\vec{OB} \text{ とおく}$$

$$|\vec{OA}| = 4, |\vec{OB}| = 5,$$

$$|\vec{AB}| = 6 \text{ より, } |\vec{OB} - \vec{OA}|^2 = 36$$

$$\therefore |\vec{OB}|^2 - 2\vec{OA} \cdot \vec{OB} + |\vec{OA}|^2 = 36$$

$$\therefore \vec{OA} \cdot \vec{OB} = \frac{5}{2}$$

$$\begin{aligned} |\vec{OH}|^2 &= s^2|\vec{OA}|^2 + 2st\vec{OA} \cdot \vec{OB} + t^2|\vec{OB}|^2 \\ &= 16s^2 + 5st + 25t^2 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{AH}|^2 &= |\vec{OH} - \vec{OA}|^2 \\ &= |\vec{OH}|^2 - 2\vec{OA} \cdot (s\vec{OA} + t\vec{OB}) + |\vec{OA}|^2 \\ &= 16s^2 + 5st + 25t^2 - 32s - 5t + 16 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{BH}|^2 &= |\vec{OH} - \vec{OB}|^2 \\ &= |\vec{OH}|^2 - 2\vec{OB} \cdot (s\vec{OA} + t\vec{OB}) + |\vec{OB}|^2 \\ &= 16s^2 + 5st + 25t^2 - 5s - 50t + 25 \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

Hは外心より、 $|\vec{OH}| = |\vec{AH}| = |\vec{BH}|$  なるので①~③より

$$\begin{cases} 32s + 5t = 16 \\ 5s + 50t = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = \frac{3}{7} \\ t = \frac{16}{35} \end{cases}$$

$$\therefore \vec{OH} = \frac{3}{7}\vec{OA} + \frac{16}{35}\vec{OB}$$

