



2013年教育学部(算数・技術)第8問

8  $r$  を1より大きい実数とする. 半径1の円  $C$  の周上に点  $Q$  をとる. 最初に円  $C$  の中心  $P$  は座標平面の  $(0, 1)$ , 点  $Q$  は  $(0, 2)$  にあるものとし, 円  $C$  が  $x$  軸に接しながら  $x$  軸の正の方向にすべることなく転がっていく. 角  $\theta$  ラジアンだけ回転したとき, 半直線  $PQ$  上に  $PR = r$  となる点  $R$  をとる.  $\theta$  を  $0$  から  $2\pi$  まで動かしたときの  $R$  の軌跡を考える.

- (1)  $\alpha, \beta$  は  $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$  をみたし,  $\theta = \alpha$  のときの  $R$  の座標と  $\theta = \beta$  のときの  $R$  の座標とが一致するものとする.  $t = \frac{\beta - \alpha}{2}$  とおくと,  $r$  を  $t$  を用いて表せ.
- (2) (1)において,  $\theta$  を  $\alpha$  から  $\beta$  まで動かしたときの  $R$  の軌跡によって囲まれた図形の面積を  $S$  とする.  $S$  を  $t$  を用いて表せ.
- (3)  $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{S}{r^2}$  を求めよ.