

2015年医学部第2問

2 スイッチを押すと、0から $n$ までの整数が1つ表示される機械がある。表示される数字を $X$ とすると、 $X = k$ となる確率 $P(X = k) = C\alpha^k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, n$ )である。ただし、 $C$ は定数、 $0 < \alpha < 1$ である。

- (1)  $P(X = k)$ を $\alpha$ と $k$ で表せ ( $k = 0, 1, 2, \dots, n$ )。
- (2)  $P(X < k) > 1 - \alpha^k$ であることを示せ ( $k = 1, 2, 3, \dots, n + 1$ )。
- (3) 確率 $p$ で1点もらえ、確率 $1 - p$ で得点がもらえない試行を考える ( $0 < p < 1$ )。この試行を独立に $m$ 回行ったとき、 $l$ 点 ( $0 \leq l \leq m$ ) もらえる確率を $Q_{m,l}(p)$ と表す。このとき、 $m, l$ を一定とし、 $p$ を変数とみなして以下の問に答えよ。
  - (i)  $y = \log Q_{m,l}(p)$ はどのような変化をするか。 $p$ を横軸、 $y$ を縦軸とする $y$ のグラフの概形を描け。ただし、 $\log$ は自然対数である。
  - (ii)  $Q_{m,l}(p)$ を最大にする $p$ を求めよ。
- (4)  $\alpha = \frac{1}{2}$ とする。このとき、 $Q_{2m,m}(P(X < k))$ を最大にする $k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots, n$ )を求めよ。