

2015年理系第5問

5 n は自然数, a は $a > \frac{3}{2}$ をみたす実数とし, 実数 x の関数

$$f(x) = \int_0^x (x - \theta)(a \sin^{n+1} \theta - \sin^{n-1} \theta) d\theta$$

を考える. ただし, $n = 1$ のときは $\sin^{n-1} \theta = 1$ とする.

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} \theta d\theta = \frac{n}{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} \theta d\theta$ を示せ.

(2) $f'(\frac{\pi}{2}) = 0$ をみたす n と a の値を求めよ.

(3) (2) で求めた n と a に対して, $f(\frac{\pi}{2})$ を求めよ.