

2011年 医学部 第2問

2 平面上に正三角形でない鋭角三角形 ABC が与えられている。辺 BC, CA, AB の長さをそれぞれ a, b, c とし, $s = \frac{a+b+c}{2}$ とおく。さらに, 辺 BC, CA, AB をそれぞれ $s-c:s-b, s-a:s-c, s-b:s-a$ に内分する点を X, Y, Z とする。また, O を原点とする。次の問いに答えよ。

(1) 点 N を $\vec{ON} = \frac{(s-a)\vec{OA} + (s-b)\vec{OB} + (s-c)\vec{OC}}{s}$ と定義するとき, 3 直線 AX, BY, CZ は N で交わることを示せ。

(2) P を $\triangle ABC$ の内部の点, $\triangle PBC, \triangle PCA, \triangle PAB$ の面積をそれぞれ S_A, S_B, S_C とするとき,

$$\vec{OP} = \frac{S_A\vec{OA} + S_B\vec{OB} + S_C\vec{OC}}{S_A + S_B + S_C}$$

と表される。このことを用いて, $\triangle ABC$ の外心を Q とするとき, \vec{OQ} を $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}, a, b, c$ を用いて表せ。

(3) $\triangle ABC$ の重心を G とする。点 N が Q と G を通る直線上にあるとき, $\triangle ABC$ は 2 等辺三角形であることを示せ。