旭川医科大学

2010年 医学部 第4問　1枚目／2枚

数理 石井K

4 次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ について，次の問いに答えよ．

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ を求めよ．

(ii) 区間 $0<x<\pi$ で $f(x)$ の増加減少を調べよ．

(2) 三角形ABCにおいて，∠A，∠Bの大きさをそれぞれ α，β とし，それらの角の対辺の長さをそれぞれ a，b で表す．$0<\alpha<\beta<\pi$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$\frac{b^2}{a^2}<\frac{1-\cos\beta}{1-\cos\alpha}<\frac{\beta^2}{\alpha^2}$$

(1)(i) $f(x)=\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\dfrac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$

$\therefore \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ より，$\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x}=\underline{\frac{1}{2}}$ //

(ii) $f'(x)=\dfrac{\sin x\cdot x^2-(1-\cos x)\cdot 2x}{x^4}=\dfrac{x\sin x+2\cos x-2}{x^3}$

$g(x)=x\sin x+2\cos x-2$ とおくと

$g'(x)=\sin x+x\cos x-2\sin x$

$\quad=-\sin x+x\cos x$

$g''(x)=-\cos x+\cos x-x\sin x=-x\sin x<0$ （$\because$ $0<x<\pi$ より）

$\therefore$ $g'(x)$ は $0<x<\pi$ において単調減少で，$g'(0)=0$ なので，$g'(x)<0$

$\therefore$ $g(x)$ は $0<x<\pi$ において単調減少で，$g(0)=0$ なので，$g(x)<0$

$\therefore$ $f'(x)<0$ $\therefore$ $0<x<\pi$ において <u>$f(x)$ は単調減少</u> //

(2) (1)より，$0<x<\pi$ で $f(x)$：単調減少なので，

$0<\alpha<\beta<\pi$ のとき，$f(\alpha)>f(\beta)$ $\iff$ $\dfrac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}>\dfrac{1-\cos\beta}{\beta^2}$

$\iff$ $\dfrac{1-\cos\beta}{1-\cos\alpha}<\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}$ $\cdots$ ①

2枚目へつづく

2010年 医学部 第4問 　2枚目／2枚

数理 石井K

4 次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ について，次の問いに答えよ．

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ を求めよ．

(ii) 区間 $0<x<\pi$ で $f(x)$ の増加減少を調べよ．

(2) 三角形ABCにおいて，∠A，∠Bの大きさをそれぞれ α，β とし，それらの角の対辺の長さをそれぞれ a，b で表す．$0<\alpha<\beta<\pi$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$\frac{b^2}{a^2}<\frac{1-\cos\beta}{1-\cos\alpha}<\frac{\beta^2}{\alpha^2}$$

(2) のつづき

一方，正弦定理より，

$$\frac{1-\cos\beta}{1-\cos\alpha}-\frac{b^2}{a^2}=\frac{1-\cos\beta}{1-\cos\alpha}-\frac{(2R\sin\beta)^2}{(2R\sin\alpha)^2}$$

$$=\frac{1-\cos\beta}{1-\cos\alpha}-\frac{1-\cos^2\beta}{1-\cos^2\alpha}$$

$$=\frac{(1-\cos\beta)(1+\cos\alpha)-(1-\cos^2\beta)}{1-\cos^2\alpha}$$

$$=\frac{(\cos\alpha-\cos\beta)(1-\cos\beta)}{1-\cos^2\alpha}$$

>0 　$(\because \cos\alpha-\cos\beta>0,\ 1-\cos^2\alpha>0,\ 1-\cos\beta>0)$ 　…②

①，②より，$\dfrac{b^2}{a^2}<\dfrac{1-\cos\beta}{1-\cos\alpha}<\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}$ が成り立つ ▨