

2013年理系第3問

3  $a$  を正の定数とし、 $f(x) = ae^{-ax}$  とする。ただし、 $e$  を自然対数の底とする。原点を  $O$  とし、曲線  $y = f(x)$  上の点  $P(s, f(s))$  における接線  $l$  と  $x$  軸、 $y$  軸との交点をそれぞれ  $Q$ 、 $R$  とするとき、以下の設問に答えよ。各設問とも、解答とともに導出過程も記述せよ。

- (1) 接線  $l$  の方程式と 2 点  $Q$ 、 $R$  の座標を求めよ。
- (2) 曲線  $y = f(x)$  上の点  $(1, f(1))$  における接線と  $x$  軸、および直線  $x = 1$  で囲まれた部分の面積を  $S_1$  とする。また、曲線  $y = f(x)$  と  $x$  軸、および 2 直線  $x = 1$ 、 $x = t$  で囲まれた部分の面積を  $S_2$  とする。ただし、 $t > 1$  とする。このとき、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_2}{S_1}$  を求めよ。
- (3)  $s$  の値が  $s \geq 0$  の範囲で変化するとき、三角形  $ROQ$  の面積  $T(s)$  の最大値とそのときの  $s$  の値を求めよ。