

2014年理系第4問

4 平面上に三つの異なる定点 O, A, B がある. 線分 AB の中点を M とする. また, 同じ平面上に動点 P があり, $\angle APB = \frac{\pi}{2}$ を満たす. $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OM} = \vec{m}$ とする. 以下の設問に答えよ. (1) は解答のみでよく, (2), (3) は解答とともに導出過程も記述せよ.

(1) \vec{m} を \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ.

(2) $|\overrightarrow{MP}|$ を \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ.

(3) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{14}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -6$ が成り立つ. また, \vec{a} と \vec{m} のなす角を α , \vec{a} と \overrightarrow{MP} のなす角を β とする. ただし, $0 \leq \alpha \leq \pi$, $0 \leq \beta \leq \pi$ とする. 以下の設問 (i), (ii), (iii) に答えよ.

(i) $\cos \alpha$ の値を求めよ.

(ii) $\triangle OPA$ の面積が最大となるときの β の値を求めよ.

(iii) $\triangle OPA$ の面積の最大値を求めよ.