2014年 理系 第4問

$\boxed{4}$ 平面上に三つの異なる定点O，A，Bがある．線分ABの中点をMとする．また，同じ平面上に動点Pがあり，$\angle\mathrm{APB} = \dfrac{\pi}{2}$ を満たす．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \vec{m}$ とする．以下の設問に答えよ．(1) は解答のみでよく，(2)，(3) は解答とともに導出過程も記述せよ．

(1) $\vec{m}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{MP}}|$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(3) $|\vec{a}| = 2$，$|\vec{b}| = \sqrt{14}$，$\vec{a}\cdot\vec{b} = -6$ が成り立つ．また，$\vec{a}$ と $\vec{m}$ のなす角を α，$\vec{a}$ と $\overrightarrow{\mathrm{MP}}$ のなす角を β とする．ただし，$0 \leqq \alpha \leqq \pi$，$0 \leqq \beta \leqq \pi$ とする．以下の設問(ｉ)，(ⅱ)，(ⅲ)に答えよ．

(ｉ) $\cos\alpha$ の値を求めよ．

(ⅱ) △OPA の面積が最大となるときの β の値を求めよ．

(ⅲ) △OPA の面積の最大値を求めよ．