

2013年理系第3問

3 a を正の定数とし、 $f(x) = ae^{-ax}$ とする。ただし、 e を自然対数の底とする。原点を O とし、曲線 $y = f(x)$ 上の点 $P(s, f(s))$ における接線 l と x 軸、 y 軸との交点をそれぞれ Q 、 R とすると、以下の設問に答えよ。各設問とも、解答とともに導出過程も記述せよ。

- (1) 接線 l の方程式と2点 Q 、 R の座標を求めよ。
- (2) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(1, f(1))$ における接線と x 軸、および直線 $x = 1$ で囲まれた部分の面積を S_1 とする。また、曲線 $y = f(x)$ と x 軸、および2直線 $x = 1$ 、 $x = t$ で囲まれた部分の面積を S_2 とする。ただし、 $t > 1$ とする。このとき、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_2}{S_1}$ を求めよ。
- (3) s の値が $s \geq 0$ の範囲で変化するとき、三角形 ROQ の面積 $T(s)$ の最大値とそのときの s の値を求めよ。