0001854455418999

秋田大学

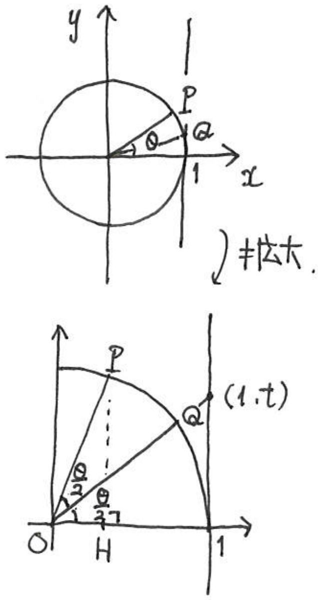
2014年 第3問

$\boxed{3}$ 原点Oを中心とする半径1の円C上の点をPとし，線分OPとx軸の正の向きとのなす角をθとする．ただし，$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$とする．また，$C$上の点Qを，線分OQと$x$軸の正の向きとのなす角が$\frac{\theta}{2}$となる点とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 直線OQと直線$x=1$との交点を$(1,\ t)$とするとき，Pの座標をtを用いて表せ．

(2) PからⅹⅠ軸におろした垂線の交点をHとする．△OPHの三辺の長さの和をθで表す関数を$r(\theta)$とするとき，関数$y=\frac{1}{r(\theta)}$のグラフをかけ．ただし，横軸にθ，縦軸にyをとるものとする．

(3) 定積分$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{r(\theta)}\,d\theta$を求めよ．



(1) $P(\cos\theta, \sin\theta)$，$\tan\frac{\theta}{2}=t$ より．

$\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}-1$

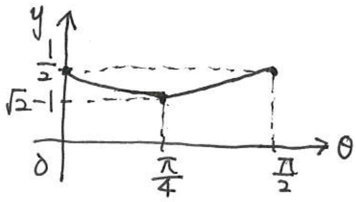
ここで，$\tan^2\frac{\theta}{2}+1=\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}$ より．$\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{t^2+1}$

$\therefore \cos\theta = \frac{2}{t^2+1}-1 = \frac{1-t^2}{t^2+1}$

$\therefore \sin\theta = \sqrt{1-\frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2}} = \frac{2t}{t^2+1}$　$\therefore \underline{P\left(\frac{1-t^2}{t^2+1}, \frac{2t}{t^2+1}\right)}$ //

(2) $(\theta) = 1+\cos\theta+\sin\theta$

$\therefore y=\frac{1}{1+\cos\theta+\sin\theta}$　$y'=\frac{-(-\sin\theta+\cos\theta)}{(1+\cos\theta+\sin\theta)^2}=\frac{\sin\theta-\cos\theta}{(1+\cos\theta+\sin\theta)^2}$



θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
y'		$-$	0	$+$	
y	$\frac{1}{2}$	↘		↗	$\frac{1}{2}$

$\sqrt{2}-1$
極小

(3) (1)より．$t=\tan\frac{\theta}{2}$ とおくと．

θ	$0 \to \frac{\pi}{2}$
t	$0 \to 1$

，$dt=\frac{d\theta}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} \longrightarrow d\theta = 2\cdot\frac{dt}{t^2+1}$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{r(\theta)}d\theta = \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{1-t^2}{t^2+1}+\frac{2t}{t^2+1}}\cdot\frac{2}{t^2+1}\,dt$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{t+1}\,dt$$

$$= \Big[\log|t+1|\Big]_0^1 = \underline{\log 2}\ //$$