



2014年理系第5問

 数理
石井K

5 4点 $O(0, 0, 0)$, $A(\sqrt{2}, 0, 0)$, $B(0, y, 0)$, $C(0, 0, \sqrt{5})$ を頂点とする四面体 $OABC$ において, $y > 0$, $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$ とする. このとき y の値を求めると $y = \frac{\sqrt{30}}{3}$ である. また, 原点 O から $\triangle ABC$ に下ろした垂線の足を H とする. このとき, ベクトル \vec{OH} を成分で表すと $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{30}}{10}, \frac{\sqrt{5}}{5})$ である.

$$AB = \sqrt{2+y^2}, \quad BC = \sqrt{y^2+5}, \quad AC = \sqrt{7} \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{30}}{10}, \frac{\sqrt{5}}{5} \right)$$

余弦定理より. $7 = y^2 + 2 + y^2 + 5 - 2 \cdot \sqrt{y^2+2} \cdot \sqrt{y^2+5} \cdot \cos \frac{\pi}{3}$

$$\therefore 7 = 2y^2 + 7 - \sqrt{y^2+2} \cdot \sqrt{y^2+5}$$

$$\therefore 4y^4 = y^4 + 7y^2 + 10$$

$$3y^4 - 7y^2 - 10 = 0$$

$$\therefore (y^2+1)(3y^2-10) = 0 \quad (y^2+1 > 0 \text{ より}) \quad y^2 = \frac{10}{3}$$

$$y > 0 \text{ より } y = \frac{\sqrt{30}}{3}$$

この四面体の体積は $\frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times y \times \sqrt{5} \times \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{10}y}{6} \dots \textcircled{1}$

H は平面 ABC 上にあるので $\vec{AH} = a\vec{AB} + b\vec{AC}$ と表せる.

$$\therefore \vec{OH} = \vec{OA} + a(\vec{OB} - \vec{OA}) + b(\vec{OC} - \vec{OA})$$

$$= (1-a-b)\vec{OA} + a\vec{OB} + b\vec{OC}$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OB} \cdot \vec{OC} = \vec{OA} \cdot \vec{OC} = 0$$

成分計算!

$$\vec{OH} \cdot \vec{AB} = 0 \text{ より } \vec{OH} \cdot \vec{AB} = \vec{OH} \cdot (\vec{OB} - \vec{OA})$$

$$= (1-a-b)\vec{OA} \cdot \vec{OB} + a|\vec{OB}|^2 + b\vec{OB} \cdot \vec{OC}$$

$$- (1-a-b)|\vec{OA}|^2 - a\vec{OA} \cdot \vec{OB} - b\vec{OA} \cdot \vec{OC}$$

$$= \frac{10}{3}a - 2(1-a-b) = 0 \quad \therefore 8a + 3b = 3 \dots \textcircled{1}$$

同様に $\vec{OH} \cdot \vec{AC} = 0$ より. $2a + 7b = 2 \dots \textcircled{2}$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } a = \frac{3}{10}, \quad b = \frac{1}{5} \quad \therefore \vec{OH} = \frac{1}{2}\vec{OA} + \frac{3}{10}\vec{OB} + \frac{1}{5}\vec{OC} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{30}}{10}, \frac{\sqrt{5}}{5} \right)$$