0002233906677999

会津大学

2016年 コンピュータ理工 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ 曲線 $y=e^{-x}$ を C とし，n を自然数とする．このとき，以下の空欄をうめよ．

(1) 曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ e^{-t})$ における接線が x 軸と交わる点を Q とする．点 Q の x 座標は $\boxed{\text{イ}}$ である． $t+1$

(2) 一般に，曲線 C 上の点 P_n が与えられたとき，この点 P_n における接線が x 軸と交わる点を Q_n とし，点 Q_n を通り，x 軸に垂直な直線と曲線 C の交点を P_{n+1} とする．$\mathrm{P}_1(0,\ 1)$ から出発して，Q_1，P_2，Q_2，$\cdots$ のように点をとる．このとき，点 Q_n の x 座標は $\boxed{\text{ロ}}$ である． n

(3) 曲線 C，直線 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ および直線 $\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$ で囲まれた部分の面積を S_n とする．このとき，$S_n=\boxed{\text{ハ}}$ である． $\dfrac{e-2}{2e^n}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n=\boxed{\text{ニ}}$ である． $\dfrac{e-2}{2(e-1)}$

(1) $y'=-e^{-x}$ より，点 P における接線は，$y=-e^{-t}(x-t)+e^{-t}$

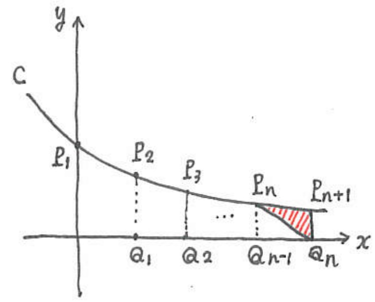
$y=0$ を代入して整理すると，$e^{-t}(x-t-1)=0$ $\quad\therefore\ \underline{x=t+1}$ //

(2) (1) で求めた x に $t=0$ を代入すると，$x=1$

$\therefore$ Q_n の x 座標を x_n とおくと，$x_1=1$

また，(1) より，$x=t+1$ であるから，$a_{n+1}=a_n+1$

$\therefore$ $\{a_n\}$ は初項 1，公差 1 の等差数列 より，$a_n=\underline{n}$ //



(3) (2) より，$\mathrm{Q}_n(n,0)$，$\mathrm{P}_n(n-1,e^{1-n})$ より，

$$
\begin{aligned}
S_n &= \int_{n-1}^{n} e^{-x}\,dx-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot e^{1-n}\\
&= \Big[-e^{-x}\Big]_{n-1}^{n}-\frac{1}{2}e^{1-n}\\
&= -e^{-n}+e^{1-n}-\frac{1}{2}e^{1-n}\\
&= \frac{1}{2}e^{1-n}-e^{-n}\\
&= \underline{\frac{e-2}{2e^n}}\ //
\end{aligned}
$$

(4)
$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} S_n &= \frac{e-2}{2}\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^n}\\
&= \frac{e-2}{2}\cdot\frac{\frac{1}{e}}{1-\frac{1}{e}}\\
&= \underline{\frac{e-2}{2(e-1)}}\ //
\end{aligned}
$$

初項 $\frac{1}{e}$，公比 $\frac{1}{e}$ の無限等比級数の和

公比 $\frac{1}{e}$ は，$0<\frac{1}{e}<1$ より，この和は収束する．