



2015年 コンピュータ理工 第6問

6 n を自然数とするとき、以下の問いに答えよ。

(1) 次の等式を示せ。

$${}_{n+2}C_3 + {}_{n+2}C_2 = {}_{n+3}C_3$$

(2) (1)の結果を利用して、数学的帰納法により、次の等式を証明せよ。

$$\sum_{i=1}^n {}_{i+1}C_2 = {}_{n+2}C_3$$

$$\begin{aligned} (1) \quad {}_{n+2}C_3 + {}_{n+2}C_2 &= \frac{(n+2)(n+1) \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(n+2)(n+1)}{1 \cdot 2} \\ &= \frac{(n+2)(n+1)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \\ &= {}_{n+3}C_3 \quad \square \end{aligned}$$

(2) 数学的帰納法で示す

(i) $n=1$ のとき。

$$\sum_{i=1}^1 {}_{i+1}C_2 = {}_2C_2 = 1, \quad {}_{1+2}C_3 = 1 \quad \therefore \text{成り立つ}$$

(ii) $n=k$ のとき、成り立つと仮定すると、

$$\sum_{i=1}^k {}_{i+1}C_2 = {}_{k+2}C_3 \quad \text{が成り立ち、両辺に } {}_{k+2}C_2 \text{ を加えると、}$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} {}_{i+1}C_2 = {}_{k+2}C_3 + {}_{k+2}C_2$$

$$= {}_{k+3}C_3 \quad (\because (1) \text{より})$$

 $\therefore n=k+1$ のときも成り立つ(i), (ii) より、すべての自然数 n に対して、与えられた等式は成り立つ \square