



2015年 コンピュータ理工 第3問

数理
石井

3 座標空間の4点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 1, 1)$, $B(-1, 2, 0)$, $C(-1, 1, -1)$ を頂点とする四面体がある。
辺 AB 上の点 P , 辺 AC 上の点 Q が,

$$AP : PB = CQ : QA = t : (1-t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

をみたすとき、以下の空欄をうめよ。

(1) $\vec{OP} \cdot \vec{OQ}$ を t を用いて表すと

$$\vec{OP} \cdot \vec{OQ} = \boxed{\text{イ}} -6t^2 + 8t - 1$$

である。

(2) $\vec{OP} \cdot \vec{OQ}$ は、 $t = \boxed{\text{ロ}}$ のとき、最大値 $\boxed{\text{ハ}}$ をとる。

(3) $\vec{OP} \perp \vec{OQ}$ のとき、 $t = \boxed{\text{ニ}}$ である。

$$\frac{4 - \sqrt{10}}{6}$$

(1) 右上図より、 $\vec{OP} = (1-t)\vec{OA} + t\vec{OB}$, $\vec{OQ} = t\vec{OA} + (1-t)\vec{OC}$

$$|\vec{OA}|^2 = 3, \quad \vec{OA} \cdot \vec{OB} = -1 + 2 + 0 = 1, \quad \vec{OA} \cdot \vec{OC} = -1 + 1 - 1 = -1, \quad \vec{OB} \cdot \vec{OC} = 1 + 2 + 0 = 3$$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{OP} \cdot \vec{OQ} &= \{(1-t)\vec{OA} + t\vec{OB}\} \cdot \{t\vec{OA} + (1-t)\vec{OC}\} \\ &= t(1-t)|\vec{OA}|^2 + (1-t)^2\vec{OA} \cdot \vec{OC} + t^2\vec{OA} \cdot \vec{OB} + t(1-t)\vec{OB} \cdot \vec{OC} \\ &= 3t(1-t) - (1-t)^2 + t^2 + 3t(1-t) \\ &= \underline{-6t^2 + 8t - 1} \end{aligned}$$

$$(2) \vec{OP} \cdot \vec{OQ} = -6\left(t^2 - \frac{4}{3}t\right) - 1$$

$$= -6\left(t - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{5}{3}$$

$\therefore 0 \leq t \leq 1$ より、 $t = \frac{2}{3}$ のとき、最大値 $\frac{5}{3}$

(3) $\vec{OP} \perp \vec{OQ}$ のとき、 $\vec{OP} \cdot \vec{OQ} = 0$ より

$$-6t^2 + 8t - 1 = 0$$

$$\therefore t = \frac{4 \pm \sqrt{10}}{6}$$

$0 \leq t \leq 1$ より、 $t = \frac{4 - \sqrt{10}}{6}$

