首都大学東京

2014年第1問

$\boxed{1}$ s, t, uを実数，iを虚数単位とし，$\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$とする．方程式

$$f(x) = x^4 + sx^3 - tx^2 + ux + 1 = 0$$

がωを解にもつとき，以下の問いに答えなさい．

(1) $-t = s+1$, $u = s$であることを示しなさい．
(2) $f(\omega^2) = 0$であることを示しなさい．
(3) 方程式$f(x) = 0$がω, ω^2と異なる解αを2重解にもつようなsとαの組(s, α)をすべて求めなさい．

(1) $\omega^3 = 1$, $\omega + \omega^2 + 1 = 0$ より

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \omega^4 + s\omega^3 - t\omega^2 + u\omega + 1 \\ &= -t\omega^2 + (1+u)\omega + s + 1 \\ &= (t+1+u)\omega + t + s + 1 \end{aligned}$$

$\therefore$ $f(\omega) = 0$ より，$\begin{cases} t+1+u = 0 \\ t+s+1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow u = s, \ -t = s+1$ ▨

(2)
$$\begin{aligned} f(\omega^2) &= \omega^8 + s\omega^6 - t\omega^4 + u\omega^2 + 1 \\ &= \omega^2 + s - t\omega + u\omega^2 + 1 \\ &= (1+u)(-\omega-1) + s + 1 - t\omega \\ &= (1+u+t)\cdot(-\omega) + s - u \\ &= 0 \end{aligned}$$ ▨

$\omega^2 = -\omega - 1$ より

(1)の結果より

(3) $f(x) = 0$ の解が $x = \omega, \omega^2$ であることから $f(x)$ は $(x-\omega)(x-\omega^2) = x^2 - (\omega+\omega^2)x + 1 = x^2 + x + 1$

で割り切れる．

右の割り算より

$$f(x) = (x^2+x+1)\{x^2 + (s-1)x + 1\}$$

$\therefore$ $x^2 + (s-1)x + 1 = 0$ の判別式をDとおくと，

$D = (s-1)^2 - 4 = 0$ $\quad\therefore$ $s = 3, -1$

$\therefore$ $\underline{(s, \alpha) = (3, -1), (-1, 1)}$ //

$$\begin{array}{r} x^2 + (s-1)x + 1 \\ x^2+x+1 \overline{) \, x^4 + sx^3 + (s+1)x^2 + sx + 1} \\ \underline{x^4 + x^3 + x^2 \qquad\qquad\qquad} \\ (s-1)x^3 + sx^2 + sx \qquad \\ \underline{(s-1)x^3 + (s-1)x^2 + (s-1)x} \\ x^2 + x + 1 \\ \underline{x^2 + x + 1} \\ 0 \end{array}$$