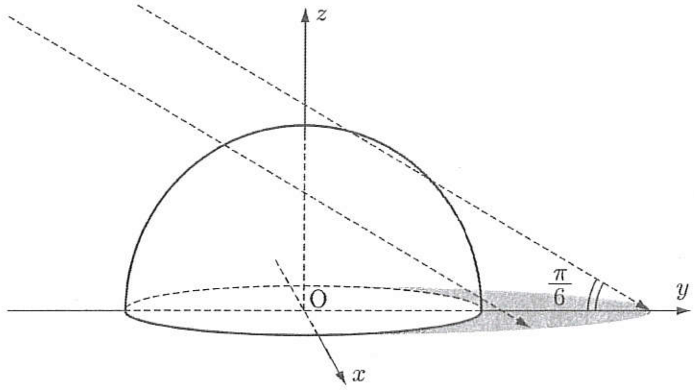
九州大学

2015 年 理系 第 3 問

$\boxed{3}$ 座標空間内に，原点 O(0, 0, 0) を中心とする半径 1 の球がある．下の概略図のように，y 軸の負の方向から仰角 $\frac{\pi}{6}$ で太陽光線が当たっている．この太陽光線はベクトル $(0,\ \sqrt{3},\ -1)$ に平行である．球は光を通さないものとするとき，以下の問いに答えよ．

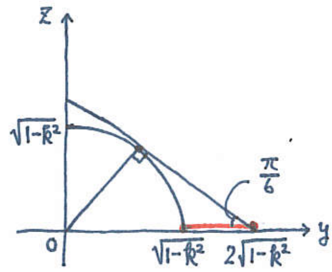


(1) 球の $z \geqq 0$ の部分が xy 平面上につくる影を考える．k を $-1 < k < 1$ を満たす実数とするとき，xy 平面上の直線 $x = k$ において，球の外で光が当たらない部分の y 座標の範囲を k を用いて表せ．

(2) xy 平面上において，球の外で光が当たらない部分の面積を求めよ．

(3) $z \geqq 0$ において，球の外で光が当たらない部分の体積を求めよ．

(1) 右図の直線を $z = -\frac{1}{\sqrt{3}}y + a \iff \frac{1}{\sqrt{3}}y + z - a = 0$ とおくと．



$x = k$ で切った断面．

点と直線のキョリ公式より．

$$\sqrt{1-k^2} = \frac{|-a|}{\sqrt{\frac{1}{3}+1}} \qquad \therefore\ a>0 \text{ より．} \ a = 2\sqrt{\frac{1-k^2}{3}}$$

$\therefore$ 直線は．$z = -\frac{1}{\sqrt{3}}y + 2\sqrt{\frac{1-k^2}{3}}$ $\quad \therefore\ z = 0$ のとき．$y = 2\sqrt{1-k^2}$

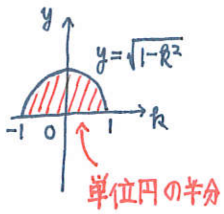
$$\therefore\ \underline{\sqrt{1-k^2} < y \leqq 2\sqrt{1-k^2}}\ //$$

(2) (1) より．

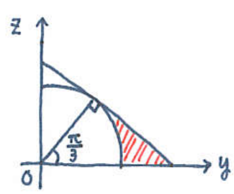
$$S = \int_{-1}^{1}\left(2\sqrt{1-k^2} - \sqrt{1-k^2}\right)dk$$

$$= \int_{-1}^{1}\sqrt{1-k^2}\,dk$$

$$= \underline{\frac{\pi}{2}}\ //$$



(3) 右図の斜線部分は．



$$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{1-k^2}\cdot 2\sqrt{1-k^2}\cdot\sin\frac{\pi}{3} - \pi\cdot\left(\sqrt{1-k^2}\right)^2\cdot\frac{1}{6}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\cdot(1-k^2)$$

$$\therefore\ V = \int_{-1}^{1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right)(1-k^2)\,dk$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\cdot 2\left[k - \frac{k^3}{3}\right]_0^1$$

$$= \underline{\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{2\pi}{9}}\ //$$