# 三重大学

2016 年 医学部 第 1 問

$\boxed{1}$ 平面上の △ABC と点 O を考える．$m$，$n$ は正の実数とする．

(1) 辺 AB を $m:n$ に内分する点を M とする．このとき $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right|^2$ を $\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2$ と内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せ．さらに

$$\frac{mn}{m+n}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2+(m+n)\left|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right|^2=n\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2+m\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2$$

を示せ．

(2) 辺 AB を $m:n$ に内分する点を $\mathrm{M}_1$，辺 BC を $m:n$ に内分する点を $\mathrm{M}_2$，辺 CA を $m:n$ に内分する点を $\mathrm{M}_3$ とする．このとき $\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2$ は

$$\frac{mn}{(m+n)^2}\left(\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right|^2\right)+\left|\overrightarrow{\mathrm{OM_1}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{OM_2}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{OM_3}}\right|^2$$

に等しいことを示せ．

(3) (2) の $m$，$n$ を変化させたとき

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2-\left|\overrightarrow{\mathrm{OM_1}}\right|^2-\left|\overrightarrow{\mathrm{OM_2}}\right|^2-\left|\overrightarrow{\mathrm{OM_3}}\right|^2$$

の最大値を $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|^2$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right|^2$ で表せ．