0001649090538999

大阪市立大学

2014年 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ a, bを実数とし，定積分 $\int_0^{\pi}(x-a-b\cos x)^2\,dx$ の値を $I(a,\ b)$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) 不定積分 $\int \cos^2 x\,dx$ を求めよ．

(2) 不定積分 $\int x\cos x\,dx$ を求めよ．

(3) $I(a,\ b)$ を a, b を用いて表せ．

(4) a, b が実数全体を動くときの $I(a,\ b)$ の最小値，および，$I(a,\ b)$ が最小値をとるときの a, b の値を求めよ．

半角の公式

(1) $(与式) = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \underline{\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C}$ (Cは積分定数)

(2) $(与式) = \int x(\sin x)'\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = \underline{x\sin x + \cos x + C}$

(3) $I(a,b) = \int_0^{\pi} x^2 + a^2 + b^2\cos^2 x - 2ax - 2bx\cos x + 2ab\cos x\,dx$

$= \left[\frac{x^3}{3} + a^2x - ax^2 + 2ab\sin x\right]_0^{\pi} + b^2\int_0^{\pi}\cos^2 x\,dx - 2b\int_0^{\pi} x\cos x\,dx$

$= \frac{\pi^3}{3} + a^2\pi - a\pi^2 + b^2\left[\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\pi} - 2b\left[x\sin x + \cos x\right]_0^{\pi}$

$= \frac{\pi^3}{3} + a^2\pi - a\pi^2 + \frac{b^2}{2}\pi - 2b(-1-1)$

$= \underline{\pi a^2 - \pi^2 a + \frac{\pi}{2}b^2 + 4b + \frac{\pi^3}{3}}$

(4) $I(a,b) = \pi(a^2 - \pi a) + \frac{\pi}{2}\left(b^2 + \frac{8}{\pi}b\right) + \frac{\pi^3}{3}$

$= \pi\left(a - \frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi^3}{4} + \frac{\pi}{2}\left(b + \frac{4}{\pi}\right)^2 - \frac{8}{\pi} + \frac{\pi^3}{3}$

$= \pi\left(a - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{2}\left(b + \frac{4}{\pi}\right)^2 + \frac{\pi^3}{12} - \frac{8}{\pi}$

$\therefore$ $I(a,b)$ は $\underline{a = \frac{\pi}{2},\ b = -\frac{4}{\pi}\ のとき,最小値\ \frac{\pi^3}{12} - \frac{8}{\pi}\ をとる}$