



2016年理系第1問

1 次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$ のグラフの概形をかけ。(2) 定積分 $\int_1^2 x\sqrt{2-x} dx$ を求めよ。

$$\begin{aligned}
 (1) \quad y' &= -\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2} \\
 &= \frac{(x-1)^2 - x^2}{x^2(x-1)^2} \\
 &= \frac{-2x+1}{x^2(x-1)^2}
 \end{aligned}$$

x	...	0	...	$\frac{1}{2}$...	1	...
y'	+	/	+	0	-	/	-
y	↗	/	↗	-4	↘	/	↘

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +0} y = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -0} y = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} y = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} y = -\infty$$

∴ グラフの概形は右のようになる。

(2) $t = 2-x$ として置換積分する。

$$dt = -dx, \quad \begin{array}{l} x \parallel 1 \rightarrow 2 \\ t \parallel 1 \rightarrow 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{与式}) &= \int_1^0 (2-t)\sqrt{t} \cdot (-dt) \\
 &= \int_0^1 2t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{3}{2}} dt \\
 &= \left[\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 \\
 &= \frac{4}{3} - \frac{2}{5} \\
 &= \frac{14}{15}
 \end{aligned}$$

