0001809630918999

# 愛知工業大学

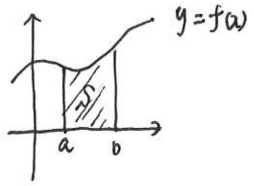
2014 年 理系 第 2 問

数理 石井K

$\boxed{2}$ $x>0$ において，つねに正の値をとる連続な関数 $f(x)$ がある．$xy$ 平面において，$0<a<b$ をみたすすべての実数 $a$, $b$ に対して，曲線 $y=f(x)$，$x$ 軸，直線 $x=a$ および直線 $x=b$ で囲まれた部分の面積 $S$ は

$$S=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$$

であるとする．




(1) $f(x)$ を求めよ．

(2) $c>0$ とする．曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(c,\ f(c))$ における接線，$x$ 軸および $y$ 軸で囲まれた三角形の面積を $T$ とするとき，$\displaystyle\lim_{c\to\infty} T$ を求めよ．

(1) $\int f(x)\,dx = F(x)+C$ とおくと，

$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

$$=F(b)-F(a)$$

$$\therefore F(b)+\frac{1}{b}=F(a)+\frac{1}{a}$$

$\therefore\ g(x)=F(x)+\dfrac{1}{x}$ とおくと．

$g(x)$ はすべての $x>0$ で一定

$\therefore\ g(x)=$ (定数)

$\therefore\ g'(x)=0$ なので　$f(x)-\dfrac{1}{x^2}=0$

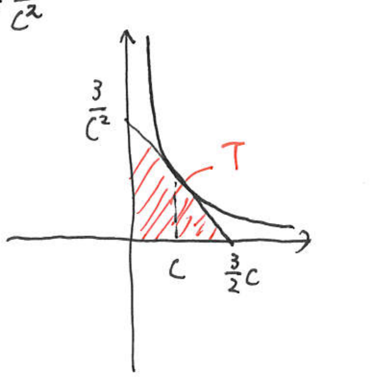
$$\therefore\ f(x)=\frac{1}{x^2}$$

(2) $f'(x)=-\dfrac{2}{x^3}$ より．

接線は　$y=-\dfrac{2}{c^3}(x-c)+\dfrac{1}{c^2}$

$\therefore\ y=-\dfrac{2}{c^3}x+\dfrac{3}{c^2}$

$\dfrac{1}{c^3}(-2x+3c)$




$$\therefore\ T=\frac{1}{2}\cdot\frac{3c}{2}\cdot\frac{3}{c^2}$$

$$=\frac{9}{4c}$$

$$\therefore\ \lim_{c\to\infty} T=0$$